



Martin Hairer, l'équation de KPZ et les structures de régularité

François Delarue

► To cite this version:

François Delarue. Martin Hairer, l'équation de KPZ et les structures de régularité. Gazette des Mathématiciens, Société Mathématique de France, 2015, 143, pp.15–28. <hal-01144844>

HAL Id: hal-01144844

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01144844>

Submitted on 22 Apr 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MARTIN HAIRER, L'ÉQUATION DE KPZ ET LES STRUCTURES DE RÉGULARITÉ

FRANÇOIS DELARUE

Laboratoire Dieudonné, Université Nice-Sophia Antipolis et UMR CNRS 7351,
Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 02, France.

RÉSUMÉ. Cette note a pour but de donner un aperçu des travaux sur les équations aux dérivées partielles stochastiques singulières, qui ont valu la médaille Fields à Martin Hairer. Nous retraçons plus particulièrement le cheminement suivi par Martin Hairer pour aborder l'équation de Kardar-Parisi-Zhang et élaborer, à partir de là, la théorie plus générale des structures de régularité, qu'il a appliquée par la suite à d'autres modèles.

1. L'ÉQUATION DE KPZ

De façon imagée, le travail de Martin Hairer présenté lors du congrès de Séoul s'apparente à une boîte à outils, appelée « structures de régularité », destinée à l'étude d'équations aux dérivées partielles rendues profondément singulières sous l'action d'un aléa. Bien que mise sous une forme aussi systématique que possible, cette boîte à outils trouve en réalité ses motivations dans plusieurs problèmes précis, issus de la physique. Le premier d'entre eux, à l'origine de l'approche développée par Martin Hairer, remonte à un article de 1986, [12], dans lequel trois physiciens, Kardar, Parisi et Zhang, ont suggéré un modèle, continu en temps et en espace, pour décrire la croissance de surfaces soumises à un dépôt aléatoire. L'équation associée, restée connue sous le nom de KPZ, a suscité, depuis, une profonde curiosité.

1.1. Un double enjeu. Plusieurs raisons ont participé à cet enthousiasme. D'une part, l'équation est mal posée, au sens où aucune des notions habituellement utilisées pour donner un sens aux solutions ne s'applique. D'autre part, le comportement statistique de la solution, et en particulier les fluctuations qu'elle décrit en temps long autour de son régime moyen, ont donné lieu, pendant de nombreuses années, à plusieurs conjectures. Malgré diverses avancées entre 1990 et 2010, les deux questions n'ont trouvé de réponses assez complètes que très récemment et, de façon remarquable, à moins de trois ans d'intervalle. Les publications entre 2010 et 2013 de plusieurs travaux majeurs, répondant chacun à une partie des interrogations soulevées par l'équation de KPZ, ont suscité un engouement profond. La distinction reçue par Martin Hairer s'inscrit dans ce contexte d'effervescence.

Les premiers travaux de Martin Hairer, [9], sur la résolubilité de l'équation de KPZ ont été publiés en 2013 moins de trois ans après ceux d'Amir, Corwin et Quastel, [1], et de Sasamoto et Spohn, [18, 17], sur le comportement statistique de la solution. Que le comportement statistique ait été discuté avant la résolubilité a, au moins à première vue, quelque chose d'anachronique, qui pourrait laisser perplexe. En réalité, les articles [1, 18, 17] s'appuient sur une construction *ad hoc* de la solution de l'équation de KPZ, proposée par Bertini et Giacomin en 1997, [2], en comparaison de laquelle, l'approche de Hairer revêt un caractère beaucoup plus systématique.

1.2. Forme de l'équation. Formellement, l'équation de KPZ s'écrit :

$$(1) \quad \partial_t h(t, x) = \partial_{xx}^2 h(t, x) + |\partial_x h(t, x)|^2 + \dot{\zeta}(t, x),$$

où $h(t, x)$ représente la hauteur d'une surface, regardée à l'instant t et au point x . Ici, x est supposé réel, l'équation n'étant comprise, à l'heure actuelle et malgré les travaux de Hairer, qu'en dimension 1. La dynamique de la hauteur est expliquée par trois facteurs : un terme diffusif, un terme non-linéaire en la pente de la surface et un terme aléatoire, noté $\dot{\zeta}$. La non-linéarité quadratique se comprend comme le premier terme non-trivial à apparaître dans le développement polynomial d'une non-linéarité en la pente, le terme d'ordre 0 correspondant à une translation verticale et le terme d'ordre 1 à une translation horizontale sous l'effet d'un champ de transport. Le facteur aléatoire $\dot{\zeta}$ peut être interprété comme une distribution aléatoire agissant de façon gaussienne sur une fonction test temps-espace $\varphi \in L^2((0, +\infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$(2) \quad \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \varphi(t, x) \dot{\zeta}(t, x) dt dx \sim \mathcal{N}\left(0, \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \varphi^2(t, x) dt dx\right),$$

où $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ désigne la loi gaussienne centrée de variance σ^2 . Lorsque φ vaut l'indicatrice d'un domaine temps-espace, le terme de gauche se lit comme une variable aléatoire gaussienne de variance égale à l'aire du domaine. Dans le cadre d'une discrétisation de type volume fini de l'équation (1), $\dot{\zeta}$ agirait sur la dynamique de la solution approchée par dépôt, sur chaque maille temps-espace, d'une quantité aléatoire distribuée selon une loi gaussienne centrée de variance égale à l'aire de la maille. Le cas échéant, les dépôts seraient indépendants d'une maille à l'autre.

Le terme $\dot{\zeta}$ est appelé « bruit blanc espace temps » et se lit comme la dérivée espace temps $\partial_t \partial_x \zeta$ d'une fonction aléatoire ζ d'exposant de Hölder à peine égal à $1/2$, de sorte que, malgré la notation utilisée dans (2), $\dot{\zeta}$ n'est en aucune manière une fonction. Aussi, toute la difficulté, dans l'étude de (1), tient à la singularité du forçage aléatoire appliqué à la dynamique de h .

1.3. Résoudre l'équation. Lorsque $\dot{\zeta}$ ne désigne plus le bruit blanc mais une fonction, (1) s'écrit comme une équation de Hamilton–Jacobi–Bellman, dont la solution admet une factorisation explicite, dite de Hopf–Cole :

$$(3) \quad h(t, x) = \ln(u(t, x)),$$

où u est à valeurs strictement positives et vérifie

$$(4) \quad \partial_t u(t, x) = \partial_{xx}^2 u(t, x) + u(t, x) \dot{\zeta}(t, x).$$

En comparaison de (1), (4) a l'avantage d'être linéaire. Lorsque x est unidimensionnel et $\dot{\zeta}$ est effectivement choisi comme le bruit blanc, il reste possible, par intégration contre le noyau de la chaleur, de donner une solution à (4). Dans le travail de Bertini et Giacomin, [2], la solution de l'équation de KPZ est définie à travers la relation (3), une fois l'équation (4) résolue.

La force du travail de Hairer est de construire directement, et dans un cadre systématisé, une solution à (1), sans passer par (3) ni (4). Une première construction, spécifiquement rédigée pour traiter (1), est proposée dans l'article de 2013, [9]. Dans un second travail, [11], publié en 2014, Martin Hairer propose une théorie générale, appelée « théorie des structures de régularité », permettant de résoudre une classe assez large d'équations aux dérivées partielles stochastiques singulières, incluant en particulier (1). Le but de cette note est d'expliquer le cheminement ayant abouti, depuis [9], à [11]. Le lecteur pourra aussi consulter la version introductive [8] et la vidéo de l'ICM [10].

1.4. Le carré d'une distribution. La version additive de (4) s'écrit :

$$(5) \quad \partial_t Y^\bullet(t, x) = \partial_{xx}^2 Y^\bullet(t, x) + \dot{\zeta}(t, x).$$

dont la solution, en dimension 1, est donnée par

$$(6) \quad Y^\bullet(t, x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} p_{t-s}(x-y) Y^\bullet(0, y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} p_{t-s}(x-y) \dot{\zeta}(s, y) ds dy,$$

où $p_t(x) = (4\pi t)^{-1/2} \exp[-x^2/(4t)]$ est la solution fondamentale de la chaleur. Pour donner un sens au membre de droite, la règle (2) suggère de calculer $\int_0^t \int_{\mathbb{R}} p_{t-s}^2(x-y) ds dy$, qui est comparable à $\int_0^t (t-s)^{-1/2} ds$ et est donc fini. En revanche, $\partial_x Y^\bullet(t, x)$ contient $\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \partial_x p_{t-s}(x-y) \dot{\zeta}(s, y) ds dy$, dont la variance, comparable à $\int_0^t (t-s)^{-3/2} ds$, diverge. La valeur critique pour la convergence de $\int_0^t (t-s)^{-\beta} ds$ étant $\beta = 1$, un argument d'interpolation suggère que Y^\bullet est au mieux $1/2 - \eta$ Hölder continu en espace, pour $\eta > 0$ aussi petit que souhaité. Le même comportement étant attendu pour h dans (1), la non-linéarité en gradient dans l'équation de KPZ se lit comme le carré d'une distribution, pierre d'achoppement des méthodes usuelles.

1.5. Comportement en temps long. Si la non-linéarité dans (1) soulève des difficultés quant au sens à donner aux solutions, elle en affecte aussi le comportement qualitatif. La formule (6) montre, qu'en l'absence de non-linéarité, la solution de (1) se réduit à une gaussienne de variance d'ordre t au temps t^2 . Autrement dit, sous l'action d'un changement d'échelle « diffusif » d'ordre $\lambda \gg 1$, la solution de l'équation linéaire, évaluée au point temps-espace $(\lambda^2 t, \lambda x)$, a des fluctuations gaussiennes d'amplitude $\lambda^{1/2}$. En présence de la non-linéarité, le comportement statistique a été mis en évidence par Amir, Corwin et Quastel, [1], et Sasamoto et Spohn [18, 17]. Pour

certaines conditions initiales, la distribution de la solution de (1) en un point temps-espace donné est explicitement connue. Les fluctuations en temps long sont d'ordre $\lambda^{1/2}$ au point, d'échelle temps-espace non-diffusive, $(\lambda^{3/2}t, \lambda x)$, et sont reliées à celles (non gaussiennes) de la plus grande des valeurs propres d'une matrice hermitienne de grande taille à entrées gaussiennes indépendantes. Ce phénomène, observé pour d'autres modèles aléatoires de croissance, met en évidence, à côté du régime gaussien (issu du théorème central limite), un autre régime limite en théorie des probabilités, commun à une certaine classe de modèles, appelée classe d'universalité de KPZ. Le lecteur pourra visionner l'exposé de Borodine à l'ICM, [3], ou consulter le cours de Quastel à St-Flour, [16].

2. LA NÉCESSITÉ DE RENORMALISER

2.1. Régularisation du bruit blanc. Une démarche naturelle, pour envisager l'équation de KPZ, consiste à régulariser le bruit blanc de façon à faire de $\dot{\zeta}$ une vraie fonction. En désignant, de façon générique, par $(\dot{\zeta}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une version régularisée de $\dot{\zeta}$, il s'agit de résoudre, au sens classique,

$$(7) \quad \partial_t h_\varepsilon = \partial_{xx}^2 h_\varepsilon + |\partial_x h_\varepsilon|^2 + \dot{\zeta}_\varepsilon,$$

sous la condition initiale $h_\varepsilon = h_0$, et d'étudier le comportement asymptotique de h_ε lorsque ε tend vers 0.

Quelle que soit la forme envisagée pour $\dot{\zeta}_\varepsilon$, il est, bien entendu, impossible d'espérer établir la convergence de la solution h_ε lorsque ε tend vers 0, la non-linéarité quadratique étant en effet appelée à « exploser » le long de la régularisation. En revanche, l'espoir est de corriger la dynamique dans (7) dans le but de compenser l'explosion et d'établir la convergence.

La correction à appliquer a été mise en évidence par Bertini et Giacomin dans [2]. Il s'agit, pour équilibrer la non-linéarité, de soustraire au terme source une constante C_ε , dépendant de la procédure de régularisation utilisée et divergeant lorsque ε tend vers 0. Une telle opération porte le nom de « renormalisation ». Dans [2], le calcul du « contre-terme » C_ε repose explicitement sur la transformation de Hopf–Cole rappelée dans la section précédente. Ce résultat est retrouvé par Martin Hairer à l'aide d'une approche plus systématique et plus robuste, dans laquelle la limite des solutions renormalisées est caractérisée de façon intrinsèque.

Dans [2] et dans [9], le bruit blanc n'est régularisé qu'à *minima*, dans la direction x . Intuitivement, ceci est suffisant pour donner un sens à (7). L'approche générale développée par Martin Hairer dans [11] permet d'envisager des régularisations espace-temps et, ainsi, de voir $\dot{\zeta}_\varepsilon$ comme une fonction.

2.2. Développement au premier ordre de la solution. Dans les travaux de Martin Hairer, l'équation de KPZ est envisagée sur le tore \mathbb{S}^1 , de façon à bénéficier de propriétés supplémentaires de compacité. Dans ce contexte, la compréhension de (1) repose sur l'introduction d'une structure le long de laquelle la solution attendue h est susceptible d'être développée.

Intuitivement, le premier terme d'un tel développement ne peut être que la solution de l'équation de la chaleur stochastique (5), obtenue en ignorant la non-linéarité. Martin Hairer la note Y^\bullet pour indiquer qu'elle est à la racine du développement. Formellement, la différence $h - Y^\bullet$ vérifie

$$\partial_t(h - Y^\bullet) = \partial_{xx}^2(h - Y^\bullet) + |\partial_x(h - Y^\bullet)|^2 + 2\partial_x(h - Y^\bullet)\partial_x Y^\bullet + |\partial_x Y^\bullet|^2.$$

En partant du principe que Y^\bullet est le terme de plus basse régularité dans le développement de h , ou encore que $h - Y^\bullet$ est de régularité supérieure à Y^\bullet , il est légitime de se focaliser, dans un premier temps, sur la version réduite

$$(8) \quad \partial_t Y^\vee = \partial_{xx}^2 Y^\vee + |\partial_x Y^\bullet|^2,$$

la notation arborescente \vee dans Y^\vee indiquant que l'équation ci-dessus est dirigée par la répétition du terme racine \bullet , c'est-à-dire $\partial_x Y^\bullet \times \partial_x Y^\bullet$. Volontairement, nous resterons flous sur les conditions initiales de Y^\bullet et Y^\vee , celles-ci étant choisies de façon à rendre la distribution statistique des solutions aussi stationnaire que possible.

Naturellement, Y^\bullet n'étant pas différentiable, le terme $|\partial_x Y^\bullet|^2$ n'est pas mieux défini que la non-linéarité dans (1). Néanmoins, (8) présente, en comparaison, l'avantage de distinguer la solution Y^\vee du terme singulier $|\partial_x Y^\bullet|^2$. Une possibilité, pour donner un sens à l'équation ci-dessus, est de remplacer Y^\bullet par une version régularisée en espace, notée Y_ε^\bullet , et de considérer, de façon équivalente, Y_ε^\vee . Le cas échéant, la question est de comprendre le comportement asymptotique de $|\partial_x Y_\varepsilon^\bullet|^2$ lorsque ε tend vers 0.

Pour construire Y_ε^\bullet , une façon simple est de substituer $\dot{\zeta}_\varepsilon$ à $\dot{\zeta}$ dans (5). Par exemple, lorsque $\dot{\zeta}_\varepsilon$ est obtenu par convolution de $\dot{\zeta}$ à l'aide d'un noyau $\varepsilon^{-1}\rho(\varepsilon^{-1}\cdot)$, il vient (en oubliant la condition initiale)

$$\partial_x Y_\varepsilon^\bullet(t, x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \partial_x \left(\int_{\mathbb{R}} p_{t-s}(x-y) \rho\left(\frac{y-u}{\varepsilon}\right) dy \right) \dot{\zeta}(s, u) ds du.$$

La formule (2) donne une façon de calculer la variance du membre de droite. L'effet régularisant du noyau de la chaleur suggère de limiter l'intégration à un voisinage de t de l'ordre de ε^2 . Sur cet intervalle, le gradient ajoute un facteur $1/\varepsilon$, la norme infinie de la convolution est d'ordre $1/\varepsilon$ et la norme L^1 d'ordre 1. De fait, la variance attendue est de l'ordre de $\varepsilon^2 \times \varepsilon^{-3} = \varepsilon^{-1}$, qui, comme cela pouvait être anticipé, explose lorsque ε tend vers 0.

Pour contourner cet écueil, l'idée est de « renormaliser » et de compenser la singularité en soustrayant la partie divergente. Le premier résultat de [9] est de calculer explicitement le contre-terme par lequel (8) doit être corrigée :

Proposition 1. *Pour un certain choix des conditions initiales et du noyau de régularisation, il existe une constante C telle que les solutions de*

$$(9) \quad \partial_t Y_\varepsilon^\vee = \partial_{xx}^2 Y_\varepsilon^\vee + |\partial_x Y_\varepsilon^\bullet|^2 - C/\varepsilon,$$

convergent vers une fonction aléatoire Y^\vee lorsque ε tend vers 0, au sens où, pour tout $T > 0$ et $\alpha \in (0, 1)$

$$\forall \delta > 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} \|Y_\varepsilon^\vee(t, \cdot) - Y^\vee(t, \cdot)\|_\alpha \geq \delta \right) = 0,$$

la norme $\|\cdot\|_\alpha$ désignant la norme α -Hölder sur le tore \mathbb{S}^1 . La limite est indépendante du noyau choisi (dans une classe de noyaux admissibles).

La convergence mise en évidence est appelée « convergence en probabilités » : avec grande probabilité, la distance entre Y_ε^\vee et Y^\vee est petite. La limite Y^\vee s'écrit comme la solution de l'équation renormalisée :

$$(10) \quad \partial_t Y^\vee = \partial_{xx}^2 Y^\vee + |\partial_x Y^\vee|^2 - \infty,$$

la soustraction de l'infini indiquant qu'une opération de renormalisation a été effectuée. La valeur de α dans la Proposition 1 est remarquable : alors que le seuil de régularité Hölder de Y^\bullet est $1/2$, celui de Y^\vee est 1. Il s'agit d'une observation fondamentale liée à l'effet régularisant de la chaleur dans (8). La non-linéarité dans (8) est d'ordre $(-1)^-$, c-à-d $-1 - \eta$, pour $\eta > 0$ aussi petit que souhaité. Sous l'action du laplacien, deux ordres sont gagnés, et Y^\vee est de régularité Hölder 1^- (en espace).

2.3. Termes supérieurs dans le développement. Le terme Y^\vee est de fait compris comme le deuxième terme dans le développement de la solution de l'équation (1). L'idée est naturellement d'itérer le procédé et d'écrire, ou moins formellement, h sous la forme

$$(11) \quad h(t, x) = \sum_{\tau \in \mathcal{T}} Y^\tau(t, x),$$

où \mathcal{T} désigne l'ensemble des arbres binaires finis (enracinés).

La structure d'arbre binaire permet ici de coder l'action de la non-linéarité quadratique. Pour deux arbres τ_1 et τ_2 , $Y^{[\tau_1, \tau_2]}$ est lié à Y^{τ_1} et Y^{τ_2} à travers l'équation (sans en préciser la condition initiale)

$$(12) \quad \partial_t Y^{[\tau_1, \tau_2]} = \partial_{xx}^2 Y^{[\tau_1, \tau_2]} + \partial_x Y^{\tau_1} \partial_x Y^{\tau_2},$$

où $[\tau_1, \tau_2]$ désigne l'arbre obtenu en reliant les racines de τ_1 et τ_2 à une même racine. Par exemple, $\vee = [\cdot, \cdot]$.

En réalité, la résolution de (12) conduit, au moins à première vue, aux mêmes difficultés que celles rencontrées pour résoudre (8). Il se peut que le produit $\partial_x Y^{\tau_1} \partial_x Y^{\tau_2}$ ne soit pas défini, à l'image de la non-linéarité dans (8). Ceci pose une première difficulté. Une seconde est le sens à donner au développement infini (11).

Concernant le second point, un raisonnement formel laisse espérer que, pour des arbres contenant suffisamment de noeuds, les solutions associées soient différentiables. Désignons en effet par α_1 et α_2 les ordres de régularité de Y^{τ_1} et Y^{τ_2} dans (11). Alors les ordres de $\partial_x Y^{\tau_1}$ et $\partial_x Y^{\tau_2}$ sont respectivement égaux à $\alpha_1 - 1$ et $\alpha_2 - 1$. Si jamais les deux sont négatifs, le produit a, intuitivement, $\alpha_1 + \alpha_2 - 2$ pour ordre de régularité, et, par régularisation,

$Y^{[\tau_1, \tau_2]}$ a pour ordre $\alpha_1 + \alpha_2$. Si jamais l'un des deux seulement est négatif (par exemple α_1), le produit a pour ordre de régularité $\alpha_1 - 1$ et $Y^{[\tau_1, \tau_2]}$ a pour ordre $1 + \alpha_1$. Le choix $\alpha_1 = \alpha_2 = (1/2)^-$ permet de retrouver que Y^\vee est d'ordre de régularité 1^- . Le choix $\alpha_1 = (1/2)^-$ et $\alpha_2 = 1^-$ laisse penser que les termes suivants, obtenus par concaténation de \cdot et \vee , c'est-à-dire $Y^{\vee\vee}$ et Y^\vee (par ailleurs égaux par symétrie), sont d'ordre $(3/2)^-$. En fait, ce sont là les pires des scénarios et les autres termes ne peuvent pas être de régularité inférieure à $(3/2)^-$.

Le programme de Martin Hairer peut être compris comme suit. Au lieu de chercher une solution de (1) sous la forme d'un développement infini de type (11), la solution est recherchée sous la forme

$$(13) \quad h(t, x) = \sum_{\tau \in \mathcal{T}^*} Y^\tau(t, x) + u(t, x),$$

où \mathcal{T}^* est un sous-ensemble fini de \mathcal{T} et $u(t, x)$ est posée comme la solution d'une équation auxiliaire. Dit autrement, les premiers termes du développement, dont les contributions dans (1) sont trop singulières, sont traités séparément, et le reste, plus régulier (c-à-d d'ordre $(3/2)^-$), est cherché comme la solution d'une équation expurgée (autant que possible) des singularités originellement présentes dans (1).

Dans cette perspective, il serait tentant de vouloir limiter \mathcal{T}^* aux arbres τ pour lesquels la solution Y^τ n'est pas différentiable, mais ce serait une erreur, le gain en régularité n'éliminant pas de façon systématique les singularités. Par exemple, lorsque $\tau_1 = \cdot$ et $\tau_2 = \vee$ dans (12), le produit $\partial_x Y^\bullet \partial_x Y^{\vee}$ implique une distribution d'ordre $(-1/2)^-$ et une fonction d'ordre $(1/2)^-$ et n'est pas, comme nous le verrons ci-dessous, bien défini. Aussi un résultat essentiel dans [9] est de montrer que \mathcal{T}^* peut être réduit à $\{\cdot, \vee, \vee\vee, \vee\vee\vee, \vee\vee\vee\vee, \vee\vee\vee\vee\vee, \vee\vee\vee\vee\vee\vee\}$. Le cas échéant, les Y^τ sont construits par un procédé analogue à celui de la proposition 1 :

Proposition 2. *Pour $\tau \in \mathcal{T}^* \setminus \{\cdot\}$, τ s'écrivant sous la forme $[\tau_1, \tau_2]$ avec τ_1 et τ_2 dans $\{\cdot, \vee, \vee\vee, \vee\vee\vee\}$, il existe une suite de constantes $(C_\varepsilon^\tau)_{\varepsilon > 0}$ telle que les solutions $(Y_\varepsilon^\tau)_{\varepsilon > 0}$ de l'équation (avec une condition initiale appropriée)*

$$\partial_t Y_\varepsilon^\tau = \partial_{xx}^2 Y_\varepsilon^\tau + \partial_x Y_\varepsilon^{\tau_1} \partial_x Y_\varepsilon^{\tau_2} - C_\varepsilon^\tau$$

convergent en probabilité sur tout $[0, T]$ (au même sens que dans la proposition (1)) vers un processus Y^τ , indépendant du choix du noyau de convolution. Les constantes $C_\varepsilon^{\vee\vee}$ et $C_\varepsilon^{\vee\vee\vee}$ sont nulles, les constantes $C_\varepsilon^{\vee\vee\vee\vee}$, $C_\varepsilon^{\vee\vee\vee\vee\vee}$, $C_\varepsilon^{\vee\vee\vee\vee\vee\vee}$ et $C_\varepsilon^{\vee\vee\vee\vee\vee\vee\vee}$ sont égales à $-(1/4)C_\varepsilon^{\vee\vee\vee\vee}$ et divergent de façon logarithmique avec ε . En particulier, la somme de toutes les constantes de renormalisation est égale à $C_\varepsilon^\vee = C/\varepsilon$ dans la proposition 1, c-à-d $\sum_{\tau \in \mathcal{T}^} C_\varepsilon^\tau = C/\varepsilon$.*

En réalité, la proposition 2 reste vraie pour $\tau \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}^*$, mais avec le choix trivial $C_\varepsilon^\tau = 0$, suggérant ainsi que la décomposition (13) soit effectivement pertinente. Il est alors légitime de poser $h_\varepsilon^* = \sum_{\tau \in \mathcal{T}^*} Y_\varepsilon^\tau$. Un calcul simple

montre que h_ε^* est solution de l'équation de KPZ régularisée avec reste et contre-terme :

$$(14) \quad \partial_t h_\varepsilon^* = \partial_{xx}^2 h_\varepsilon^* + |\partial_x h_\varepsilon^*|^2 + \dot{\zeta}_\varepsilon - C/\varepsilon - R_\varepsilon^*,$$

où $R_\varepsilon^* = \sum_{\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}^*: [\tau_1, \tau_2] \notin \mathcal{T}^*} \partial_x Y_\varepsilon^{\tau_1} \partial_x Y_\varepsilon^{\tau_2}$ correspond au reste issu du développement formel (11).

3. LA THÉORIE DES TRAJECTOIRES RUGUEUSES

La résolution de l'équation de KPZ passe maintenant par celle d'un point fixe impliquant le terme u dans (13). Rappelons que u est entendu comme la différence $h - h^*$ où h est la solution de (1) et $h^* = \sum_{\tau \in \mathcal{T}^*} Y^\tau$. Il est également attendu comme la limite de $u_\varepsilon = h_\varepsilon - h_\varepsilon^*$ où h_ε est l'équation de KPZ régularisée avec contre-terme

$$\partial_t h_\varepsilon = \partial_{xx}^2 h_\varepsilon + |\partial_x h_\varepsilon|^2 + \dot{\zeta}_\varepsilon - C/\varepsilon.$$

3.1. Le reste comme la solution d'une équation. En faisant la différence avec (14), u_ε est solution de

$$(15) \quad \partial_t u_\varepsilon = \partial_{xx}^2 u_\varepsilon + |\partial_x u_\varepsilon|^2 + 2(\partial_x h_\varepsilon^* \partial_x u_\varepsilon) + R_\varepsilon^*.$$

L'idée est donc de chercher u solution d'une équation de la forme

$$(16) \quad \partial_t u = \partial_{xx}^2 u + |\partial_x u|^2 + 2(\partial_x h^* \partial_x u) + R^*,$$

où $R^* = \sum_{\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}^*: [\tau_1, \tau_2] \notin \mathcal{T}^*} \partial_x Y^{\tau_1} \partial_x Y^{\tau_2}$. Dans [9], Martin Hairer fait d'une pierre deux coups en montrant que, non seulement, l'équation peut être résolue de façon intrinsèque, mais aussi que la solution varie continûment lorsque les données sources varient continûment pour une topologie appropriée, garantissant ainsi que le u construit est bien la limite des u_ε .

En comparaison de (1), dont la solution attendue n'est pas différentiable, la solution de (16) est cherchée parmi un espace de fonctions d'ordre $(3/2)^-$ en espace, auquel cas la non-linéarité $|\partial_x u|^2$ est bien définie.

La résolution de (16) est donc liée à la définition des restes, qui s'interprètent comme des produits de la forme $\partial_x f \partial_x g$. Lorsque f et g sont des fonctions régulières, la distribution $\partial_x f \partial_x g$ est trivialement définie. D'après la théorie de Young [20], cette définition s'étend par continuité au cas où $\partial_x f$ et g sont respectivement α et β Hölder, avec $\alpha + \beta > 1$, mais cette extension n'est plus possible lorsque $\alpha + \beta \leq 1$. En décomposant h^* sous la forme (en prenant en compte les symétries $Y^{\vee} = Y^\vee$ et $Y^{\bowtie} = Y^{\bowtie} = Y^{\vee} = Y^{\bowtie}$) :

$$(17) \quad h^*(t, x) = Y^\bullet(t, x) + \sum_{\tau \in \mathcal{T}^*, \tau \neq \bullet} Y^\tau(t, x) = Y^\bullet + \left(Y^\vee + 2Y^{\bowtie} + 4Y^{\vee\vee} + Y^{\bowtie\bowtie} \right),$$

et en rappelant que les termes dans la somme entre parenthèses sont de régularité respective 1^- , $(3/2)^-$, $(3/2)^-$ et 2^- , il est facile de voir que, dans le terme $\partial_x u \partial_x h^*$, seul le produit $\partial_x u \partial_x Y^\bullet$ échappe à la théorie de Young (auquel cas $\alpha = (1/2)^-$ et $\beta = (1/2)^-$). De même, dans le reste R^* , seul le produit $\partial_x Y^{\bowtie} \partial_x Y^\bullet$ est, *a priori*, mal défini (avec, là encore, $\alpha = (1/2)^-$ et

$\beta = (1/2)^-$). De fait, pour construire une solution à (16), il est nécessaire de donner un sens aux distributions $\partial_x u \partial_x Y^\bullet$ et $\partial_x Y^{\times\bullet} \partial_x Y^\bullet$, compatible avec le passage à la limite le long des termes indexés par ε : $\partial_x u_\varepsilon \partial_x Y_\varepsilon^\bullet$ et $\partial_x Y_\varepsilon^{\times\bullet} \partial_x Y_\varepsilon^\bullet$.

3.2. Principe des trajectoires rugueuses. L'idée de Martin Hairer est d'utiliser la théorie des trajectoires rugueuses initiée par Lyons, [5, 14, 15]. Dans chacun des cas ci-dessus, nous sommes en effet confrontés à la nécessité de définir la distribution $f \partial_x g$ pour deux fonctions f et g de régularité Hölder $(1/2)^-$. Essentiellement, ceci revient à définir l'intégrale « croisée » $\int^x f(y) \partial_x g(y) dy$, encore notée $\int^x f(y) dg(y)$, de f contre les incréments de g . Un exemple particulièrement simple est $f \equiv g$, auquel cas $\int^x f(y) df(y)$ peut être posée égale à $(1/2)f^2(x)$. La théorie de l'intégrale stochastique en probabilités offre également une large classe d'exemples de telles intégrales, obtenues, selon les cas, par convergence dans L^2 de la méthode des rectangles au point gauche (intégrale d'Itô) ou de celle des trapèzes (intégrale de Stratonovich). De façon générale, l'intégrale croisée doit vérifier la relation de Chasles et satisfaire l'égalité $\int_a^b f dg(y) = f[g(b) - g(a)]$ lorsque f est constante. Elle peut être la limite des intégrales croisées associées à une régularisation du couple (f, g) (tel est le cas lorsque $f \equiv g$ et $\int^x f(y) df(y) = (1/2)f^2(x)$, tel est aussi le cas de l'intégrale de Stratonovich) ou pas (l'intégrale d'Itô, avec f donnée par la réalisation d'un mouvement brownien, viole la condition $\int_a^b f(y) df(y) = (1/2)[f^2(b) - f^2(a)]$).

Dans ce contexte, l'objectif de la théorie de Lyons est de proposer une construction systématique d'une large classe d'intégrales croisées une fois déterminée celle de f contre g . L'idée essentielle est la suivante : dès lors qu'une fonction u se comporte, localement, comme la fonction f , l'intégrale de u contre g existe également. Ceci a été mis en forme par Gubinelli [6] :

Définition 3. *En notant C^α les fonctions α -Hölder continues sur un intervalle I (borné), une fonction $v \in C^\alpha$ est dite contrôlée par $f \in C^\alpha$ s'il existe $v' \in C^\alpha$ et $C \geq 0$ telles que*

$$|v(y) - v(x) - v'(x)(f(y) - f(x))| \leq C|x - y|^{2\alpha}, \quad x, y \in I.$$

Ici, v' fait office de « dérivée » de v par rapport à f et le développement $v(y) = v(x) + v'(x)(f(y) - f(x)) + R(x, y)$ s'apparente à un développement de Taylor généralisé à l'ordre α , avec reste d'ordre 2α . Maintenant, l'intégrale croisée de v contre g peut être définie dès lors que celle de f contre g existe. En effet, si f et g sont dans C^α , avec $\alpha \in (1/3, 1/2]$ de sorte que l'intégrale croisée de f contre g existe et que l'« aire de Lévy » dans le terme de gauche ci-dessous vérifie

$$(18) \quad \forall x, y \in I, \quad \left| \int_x^y (f(z) - f(x)) dg(z) \right| \leq C|x - y|^{2\alpha},$$

pour $C \geq 0$, alors, pour une fonction v contrôlée par f , l'intégrale de v contre g existe sur tout $[x, y]$ comme la limite des sommes de Riemann

$$(19) \quad \sum_{i=0}^{N-1} \left(v(z_i) (g(z_{i+1}) - g(z_i)) + v'(z_i) \int_{z_i}^{z_{i+1}} (f - f(z_i)) \, dg \right),$$

le long de partitions $(z_i)_{0 \leq i \leq N}$ de $[x, y]$ de pas convergeant vers 0. De plus, l'intégrale croisée vérifie (18) pour une constante C possiblement différente.

L'idée sous-jacente est que la différence entre $\int_{z_i}^{z_{i+1}} v \, dg$ et le terme élémentaire associé dans la somme de Riemann est d'ordre $|z_{i+1} - z_i|^{3\alpha}$, expliquant ainsi la condition $\alpha > 1/3$.

3.3. Retour à KPZ. La discussion menée à la fin du §3.1 suggère de choisir $g = Y^\bullet(t, \cdot)$ (de sorte que g dépend du temps, en plus de la variable d'espace). Les candidats pour être v sont respectivement $\partial_x u(t, \cdot)$ et $\partial_x Y^{\boxtimes}(t, \cdot)$, la difficulté principale étant liée au choix de f et à l'existence d'une intégrale croisée entre f et g , pour chaque $t > 0$. Dans cette perspective, il est possible de voir l'équation (16) satisfaite par u comme une perturbation de :

$$\partial_t V = \partial_{xx}^2 V + 2\partial_x V \partial_x Y^\bullet.$$

Ici, la quantité d'intérêt est, non pas V , mais $\partial_x V$. Par dérivation, nous obtenons, comme structure additive la plus simple à considérer, l'équation :

$$(20) \quad \partial_t \Phi = \partial_{xx}^2 \Phi + \partial_{xx}^2 Y^\bullet.$$

L'idée, dans [9], est de choisir $f = \Phi(t, \cdot)$ (que v soit, en fait, égal à $\partial_x u(t, \cdot)$ ou $\partial_x Y^{\boxtimes}(t, \cdot)$). Ceci suggère de chercher u comme une fonction de classe $(3/2)^-$, dont la dérivée soit contrôlée, à chaque instant $t > 0$, par $\Phi(t, \cdot)$. Un argument de contraction en temps petit donne :

Théorème 4. *Pour $u(0, \cdot) \in \mathcal{C}^\beta$, $\beta > 0$, il existe un temps $T^* > 0$ tel que l'équation (16) admette, sur l'intervalle $[0, T^*]$, une unique solution de dérivée $\partial_x u(t, \cdot)$ contrôlée, à chaque instant $t > 0$, par $\Phi(t, \cdot)$.*

En fait, la théorie des trajectoires rugueuses garantit la continuité des intégrales croisées dès lors que les « briques de base » f , g et l'aire de Lévy associée à $\int f \, dg$ dans (18) évoluent continûment dans \mathcal{C}^α , \mathcal{C}^α et $\mathcal{C}^{2\alpha}$. A l'aide de ce résultat, il est possible de démontrer que les solutions u_ε de (15) convergent vers u :

Théorème 5. *Lorsque ε tend vers 0, la solution h^ε de (14) converge sur $[0, T^*]$ vers $h = h^* + u$, solution de l'équation de KPZ renormalisée*

$$\partial_t h(t, x) = \partial_{xx}^2 h(t, x) + |\partial_x h(t, x)|^2 + \dot{\zeta}(t, x) - \infty.$$

Cette solution coïncide avec la solution de Hopf-Cole et peut être étendue à $[0, +\infty)$ tout entier par un argument inductif.

4. STRUCTURES DE RÉGULARITÉ

Bien que le développement de h sous la forme $h^* + u$, avec u solution de l'équation auxiliaire (16), donne une construction intrinsèque de la solution de (1), il ne permet pas de poser proprement l'équation (1) en toute rigueur, même en soustrayant le symbole ∞ comme dans l'énoncé du théorème 5. La théorie des structures de régularité, introduite par Martin Hairer dans [11], permet de contourner cet écueil en interprétant l'équation dans un espace abstrait, sur lequel l'équation peut être effectivement posée de façon rigoureuse.

4.1. Principe général. L'idée fondamentale est d'associer à la solution de (1) une fonction à valeurs dans une structure abstraite, munie d'un certain nombre d'opérations formelles (multiplication, intégration, dérivation), et d'effectuer, sur cette structure, les opérations impliquées dans (1). Il s'agit, ensuite, de « ramener » les résultats de ces opérations dans l'espace physique. Schématiquement, la structure abstraite est construite à partir de « briques élémentaires », modélisant des fonctions ou des distributions de régularités différentes. Voir la solution de (1) comme une fonction à valeurs dans la structure revient à la développer, localement, sous la forme d'une combinaison des briques élémentaires sous-jacentes.

Résoudre (1) revient donc à mettre en évidence une structure, munie de briques élémentaires et d'opérations formelles, et d'une application de « reconstruction » permettant de rapatrier le produit des opérations dans l'espace physique. La structure utilisée doit pouvoir être « déformée » continûment pour traduire la convergence de h_ε vers h dans le théorème 5.

4.2. Lien avec les trajectoires rugueuses. La théorie des structures de régularité consiste en une extension, très large, de la théorie des trajectoires rugueuses de Lyons. Le point de départ de la théorie de Lyons consiste en effet en un couple de fonctions (f, g) pour lequel l'intégrale croisée de f contre g a un sens. Ceci suggère de considérer une structure munie de trois briques de base, en l'occurrence f , g et $\int f dg$, auxquelles il est raisonnable d'ajouter la fonction constante $\mathbf{1}$. Ici $\int f dg$ pourrait être entendu comme l'intégrale croisée de f contre g , mais, par abus de notation, nous allons en fait le comprendre comme « l'aire de Lévy de f contre g » introduite dans (18), c-à-d :

$$\left(\int f dg\right)(x, y) = \int_x^y (f(z) - f(x)) dg(z).$$

En réalité, nous sommes plus intéressés par la dérivée g' (comprise si besoin au sens des distributions) que par g elle-même. Ceci suggère de remplacer la brique g par g' . De même, il est préférable de se focaliser sur la dérivée (en y) de l'aire de Lévy plutôt que sur l'aire de Lévy elle-même. Pour distinguer les fonctions ou distributions des briques abstraites qui les modélisent, nous introduisons quatre objets abstraits, respectivement notés \mathfrak{f} , $d\mathfrak{g}$, $d\int \mathfrak{f} d\mathfrak{g}$ et $\mathbf{1}$, associés dans l'esprit à f , g' , $(\int f dg)'$ et $\mathbf{1}$. En supposant que f et g sont deux

fonctions \mathcal{C}^α , avec $\alpha \in (1/3, 1/2]$, comme dans (18) et (19), nous attribuons à \mathbf{f} , \mathbf{dg} , $\mathbf{d}\mathbf{f}\mathbf{dg}$ et $\mathbf{1}$, quatre indices (abstraits) de régularité (nous dirons « indices d'homogénéité ») : α , $\alpha-1$, $2\alpha-1$ et 0 . Le $2\alpha-1$ se comprend comme suit. D'après (18), l'intégrale (en y) de $(\int_x^y (f(z) - f(x)) \mathbf{dg}(z))'$ contre la fonction test $\lambda^{-1}\varphi((y-x)/\lambda)$, pour λ petit et φ régulière à support compact, est d'ordre $\lambda^{2\alpha-1}$. Ici, la fonction test est dite « piquée » au voisinage de x .

Les quatre briques de base abstraites engendrent un espace T , appelé « espace modèle », donné par (les indices $\alpha-1$, $2\alpha-1$, 0 et α étant rangés par ordre croissant)

$$T = T_{\alpha-1} \oplus T_{2\alpha-1} \oplus T_0 \oplus T_\alpha,$$

où $T_{\alpha-1}$ est l'espace vectoriel $\langle \mathbf{dg} \rangle = \mathbb{R} \mathbf{dg}$, $T_{2\alpha-1}$ est l'espace vectoriel $\langle \mathbf{d}\mathbf{f}\mathbf{dg} \rangle = \mathbb{R} \mathbf{d}\mathbf{f}\mathbf{dg}$ et ainsi de suite... de sorte que T est isomorphe à \mathbb{R}^4 .

De fait, une fonction $\mathbf{h} : \mathbb{R} \rightarrow T$ peut être identifiée avec une fonction $(\mathbf{h}_{\alpha-1}, \mathbf{h}_{2\alpha-1}, \mathbf{h}_0, \mathbf{h}_\alpha)$ à valeurs dans \mathbb{R}^4 . Si $\mathbf{h}_{\alpha-1}$ et $\mathbf{h}_{2\alpha-1}$ sont identiquement nuls, \mathbf{h} est à « indice d'homogénéité » positif. En un point $x \in \mathbb{R}$, les valeurs de $\mathbf{h}_0(x)$ et $\mathbf{h}_\alpha(x)$ sont alors à interpréter comme des coefficients, permettant d'approcher, au voisinage de x , une « certaine » fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ à l'aide d'un développement impliquant les fonctions $\mathbf{1}$ et f . Lorsque $\mathbf{h}_{\alpha-1}$ et $\mathbf{h}_{2\alpha-1}$ prennent des valeurs non-triviales, l'idée reste la même, mais, les indices d'homogénéité étant négatifs, h est une distribution.

Ce principe est à rapprocher de la définition 3 d'une fonction v contrôlée par f . Avec les notations de la définition, nous avons le développement

$$v(y) = v(x) + v'(x)(f(y) - f(x)) + R(x, y),$$

où v' est \mathcal{C}^α et R est 2α -Hölder continue. En négligeant le reste, ceci suggère d'associer à v la fonction $\mathbf{v} : \mathbb{R} \rightarrow T$, donnée par

$$(21) \quad \mathbf{v}(x) = v(x)\mathbf{1} + v'(x)\mathbf{f},$$

cette décomposition montrant que \mathbf{f} devrait, dans l'esprit, être davantage associée aux incréments de f qu'à f elle-même.

Voici maintenant la définition donnée dans [11] :

Définition 6. Une structure de régularité est un triplet (A, T, G) constitué d'un ensemble d'indices d'homogénéité A contenant 0 , minoré et localement fini, d'un espace modèle T , de la forme $\bigoplus_{\alpha \in A} T_\alpha$, chaque T_α étant un espace de Banach, avec $T_0 = \langle \mathbf{1} \rangle \cong \mathbb{R}$, et d'un groupe G d'opérateurs linéaires (continus) agissant sur T , de sorte que, pour tout $\Gamma \in G$, $\Gamma\mathbf{1} = \mathbf{1}$ et, pour tout $\alpha \in A$ et $\tau_\alpha \in T_\alpha$, $\Gamma\tau_\alpha - \tau_\alpha \in T_{<\alpha} := \bigoplus_{\beta < \alpha} T_\beta$. Pour $\tau \in T$, $\|\tau\|_\alpha$ est la norme de la composante de τ dans T_α .

Nous verrons ci-dessous que les éléments de G sont pensés pour « passer » d'un développement au point x à un développement à un autre point y dans une écriture du même type que (21).

4.3. Modèle associé aux trajectoires rugueuses. Pour rendre la notion pertinente, il est nécessaire de pouvoir revenir à l'espace physique en associant, à une combinaison d'éléments de T , une fonction ou une distribution (selon le signe des indices d'homogénéité). Dans le cas des trajectoires rugueuses, il convient d'associer, au développement (21), le développement :

$$\mathbb{R} \ni y \mapsto v(x) + v'(x)(f(y) - f(x)) \in \mathbb{R},$$

qui se lit comme une approximation au premier ordre de v au voisinage de x (x est ici gelé et y vit au voisinage de x). Aussi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous définissons une application Π_x qui à un élément de T associe une fonction ou une distribution. Nous posons $\Pi_x(\mathbf{1})$ comme étant la fonction constante $\mathbf{1}$, $\Pi_x(\mathbf{f})$ comme la fonction $f(\cdot) - f(x)$, $\Pi_x(\mathbf{dg})$ comme la distribution g' (indépendante de x) et $\Pi_x(\mathbf{d}\mathbf{f}\mathbf{dg})$ comme la distribution $(\int_x [f(z) - f(x)] dg(z))'$. Par exemple, pour $y \in \mathbb{R}$, $\Pi_x(\mathbf{f})(y) = f(y) - f(x)$. Et, pour une fonction test φ , l'action de $\Pi_x(\mathbf{d}\mathbf{f}\mathbf{dg})$ sur φ est donnée par

$$[\Pi_x(\mathbf{d}\mathbf{f}\mathbf{dg})](\varphi) = - \int_{\mathbb{R}} \varphi'(y) \left(\int_x^y (f(z) - f(x)) dg(z) \right) dy,$$

l'aire de Lévy dans l'intégrale de droite étant donnée par hypothèse.

Nous cherchons maintenant une application linéaire $\Gamma_{x,y} : T \rightarrow T$ telle que $\Pi_y = \Pi_x \circ \Gamma_{x,y}$, de façon à obtenir le développement au voisinage de y en développant au voisinage de x une écriture « translatée » au sein de T . Comme $\Pi_x(\mathbf{1})$ et $\Pi_x(\mathbf{dg})$ sont indépendants de x , il est raisonnable de poser $\Gamma_{x,y}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ et $\Gamma_{x,y}(\mathbf{dg}) = \mathbf{dg}$. Par ailleurs, nous posons $\Gamma_{x,y}(\mathbf{f}) = [f(x) - f(y)]\mathbf{1} + \mathbf{f}$, qui vérifie bien

$$\Pi_x(\Gamma_{x,y}(\mathbf{f}))(z) = [f(x) - f(y)] + [f(z) - f(x)] = \Pi_y(\mathbf{f})(z),$$

et, de façon similaire, $\Gamma_{x,y}(\mathbf{d}\mathbf{f}\mathbf{dg}) = [f(x) - f(y)]\mathbf{dg} + \mathbf{d}\mathbf{f}\mathbf{dg}$.

Les applications $\Gamma_{x,y}$ ainsi construites nous renseignent sur le choix de la structure de groupe G dans la définition 6. Nous pouvons par exemple choisir $G = \{\Gamma_\ell, \ell \in \mathbb{R}\}$, où

$$\Gamma_\ell(\mathbf{1}) = \mathbf{1}, \Gamma_\ell(\mathbf{dg}) = \mathbf{dg}, \Gamma_\ell(\mathbf{f}) = \ell\mathbf{1} + \mathbf{f}, \Gamma_\ell(\mathbf{d}\mathbf{f}\mathbf{dg}) = \ell\mathbf{dg} + \mathbf{d}\mathbf{f}\mathbf{dg},$$

auquel cas $\Gamma_{x,y}$ n'est rien d'autre que $\Gamma_{f(x)-f(y)}$. Suivant [11], nous dirons :

Définition 7. *Le couple $\mathbf{M} = ((\Pi_x)_{x \in \mathbb{R}}, (\Gamma_{x,y})_{x,y \in \mathbb{R}})$ est un modèle sur \mathbb{R} associé à la structure (A, T, G) .*

4.4. Le théorème de reconstruction. A chaque fonction $\mathbf{h} : \mathbb{R} \ni x \mapsto \mathbf{h}(x) \in T$, le modèle \mathbf{M} , introduit dans la définition 7, permet d'associer, en chaque point x de l'espace physique (en l'occurrence \mathbb{R} dans l'exemple discuté ci-dessus), une approximation locale, notée $\Pi_x(\mathbf{h}(x))$. Lorsque $\mathbf{h}(x)$ a un indice d'homogénéité positif (c-à-d le plus petit indice β , tel que la composante de $\mathbf{h}(x)$ dans T_β soit non nulle, est positif), $\Pi_x(\mathbf{h}(x))$ est à penser comme un développement local $\mathbb{R} \ni y \mapsto \Pi_x(\mathbf{h}(x))(y) \in \mathbb{R}$ au voisinage de x . Lorsque $\mathbf{h}(x)$ est à un indice d'homogénéité négatif, $\Pi_x(\mathbf{h}(x))$ s'interprète comme une distribution. Le cas échéant, le caractère local du développement

incite à considérer des fonctions tests « piquées » au voisinage de x , de la forme $y \mapsto \varphi(x - y)$ pour une fonction φ « concentrée » au voisinage de 0.

Une question naturelle est de savoir si la collection des développements locaux $(\Pi_x(\mathfrak{h}(x)))_{x \in \mathbb{R}}$, obtenus en faisant varier x , peut être relevée en une seule et même distribution (ou fonction selon l'homogénéité), dont le comportement local, au voisinage de x , serait justement donné par $\Pi_x(\mathfrak{h}(x))$. Un exemple de ce principe est la formule de Taylor. Les développements de Taylor d'une fonction régulière φ peuvent être relevés en une seule et même fonction, en l'espèce φ elle-même. Ce parallèle suggère de limiter l'analyse à des fonctions \mathfrak{h} régulières, avec la définition suivante :

Définition 8. *Etant donné un modèle \mathbf{M} sur \mathbb{R}^d , associé à une structure (A, T, G) , et un réel γ , on désigne par $\mathcal{D}_{\mathbf{M}}^\gamma$ l'ensemble des fonctions $\mathfrak{h} : \mathbb{R}^d \rightarrow T_{<\gamma}$ telles que, pour tout compact $\kappa \subset \mathbb{R}^d$ et pour tout $\alpha < \gamma$,*

$$\exists C \geq 0 : \quad \forall x, y \in \kappa, \quad \|\mathfrak{h}(y) - \Gamma_{y,x}(\mathfrak{h}(x))\|_\alpha \leq C|x - y|^{\gamma - \alpha}.$$

Considérons, à titre d'exemple, la fonction \mathfrak{v} dans (21). Pour $x, y \in \mathbb{R}$, nous savons que $\Gamma_{y,x}(\mathfrak{v}(x)) = [v(x) + v'(x)(f(y) - f(x))]\mathbf{1} + v'(x)\mathfrak{f}$. De fait, $\mathfrak{v}(y) - \Gamma_{y,x}(\mathfrak{v}(x)) = [v(y) - v(x) - v'(x)(f(y) - f(x))]\mathbf{1} + (v'(y) - v'(x))\mathfrak{f}$. La définition 3 garantit que le coefficient d'homogénéité 0 est d'ordre $|y - x|^{2\alpha}$ et celui d'homogénéité α d'ordre $|y - x|^\alpha$. De fait, \mathfrak{v} est dans $\mathcal{D}_{\mathbf{M}}^{2\alpha}$. En cela, nous comprenons en quoi la théorie des structures de régularité englobe la notion de fonction contrôlée utilisée dans les trajectoires rugueuses.

Le théorème fondamental de [11], dont la preuve utilise la théorie des on-delettes, est appelé « théorème de reconstruction » et réalise le programme envisagé ci-dessus : pour une fonction \mathfrak{h} de régularité $\gamma > 0$ (ce qui n'empêche pas \mathfrak{h} d'être d'homogénéité négative), il est possible de relever les développements en une distribution (ou une fonction si l'homogénéité est positive) :

Théorème 9. *Etant donné un modèle \mathbf{M} sur \mathbb{R}^d , associé à une structure (A, T, G) , et un réel $\gamma > 0$, il existe une unique application linéaire \mathcal{R} de $\mathcal{D}_{\mathbf{M}}^\gamma$ dans l'espace des distributions sur \mathbb{R}^d telle que, pour tout $\mathfrak{h} \in \mathcal{D}_{\mathbf{M}}^\gamma$, toute fonction régulière à support compact φ , et tout compact $\kappa \subset \mathbb{R}^d$,*

$$\exists C \geq 0 : \quad \forall x \in \kappa, \lambda \in (0, 1], \quad |(\mathcal{R}\mathfrak{h} - \Pi_x\mathfrak{h}(x))(\lambda^{-d}\varphi((\cdot - x)/\lambda))| \leq C\lambda^\gamma,$$

Naturellement, l'idée est que $\mathcal{R}\mathfrak{h}$ se comporte comme $\Pi_x\mathfrak{h}(x)$ le long des fonctions tests concentrées autour de x . En particulier, si $\Pi_x\mathfrak{h}(x)$ est une fonction continue, il vient nécessairement $\mathcal{R}\mathfrak{h}(x) = \Pi_x[\mathfrak{h}(x)](x)$. De fait, dans le cadre de (21), $\mathcal{R}\mathfrak{v}$ n'est rien d'autre que v elle-même !

Comme nous le verrons dans la section suivante, lorsque la fonction \mathfrak{h} dépend d'une variable temps-espace (t, x) , il est souhaitable de tenir compte d'éventuelles propriétés d'échelle entre les variables de temps et d'espace dans la façon de piquer la fonction test au voisinage de (t, x) . Par exemple, si le temps et l'espace sont liés par un changement d'échelle diffusif, il convient d'utiliser $\lambda^{-(d+2)}\varphi((\cdot - t)/\lambda^2, (\cdot - x)/\lambda)$ au lieu de $\lambda^{-(d+1)}\varphi((\cdot - t)/\lambda, (\cdot - x)/\lambda)$.

4.5. Opérations au sein de la structure. L'étape suivante est de traduire, au sein de la structure, les « opérations » impliquées dans la formulation du problème physique. Dans le cas de KPZ, ces opérations sont la différentiation (pour passer de la solution à son gradient), la multiplication (associée à la non-linéarité quadratique) et l'intégration contre le noyau de la chaleur. La définition du produit est la suivante :

Définition 10. *Etant donnés deux « secteurs » V et \bar{V} inclus dans T , c-à-d deux sommes directes de certains des T_α , chacune étant stable par les éléments de G , un produit sur (V, \bar{V}) est une application bilinéaire $\star : V \times \bar{V} \rightarrow T$ telle que, pour $\tau \in V_\alpha$ et $\bar{\tau} \in \bar{V}_\alpha$, $\tau \star \bar{\tau} \in T_{\alpha+\beta}$ et, pour tout élément $\Gamma \in G$, $\Gamma(\tau \star \bar{\tau}) = (\Gamma\tau) \star (\Gamma\bar{\tau})$.*

Le gain d'homogénéité par multiplication est à rapprocher de la discussion sur la régularité des différents produits dans le §2.3. La compatibilité du produit avec Γ est une hypothèse naturelle, qui traduit l'idée que l'ordre dans lequel les produits et les translations sont effectués n'a pas d'importance.

Il est remarquable que le produit soit ici défini de façon aussi abstraite. Là encore, ceci est à rapprocher de la théorie de Lyons, dans laquelle l'existence d'une intégrale croisée, possédant un minimum de propriétés, est présupposée. Comme dans l'approche de Lyons, la véritable question est de déterminer les fonctions \mathfrak{h}_1 et \mathfrak{h}_2 à valeurs dans T pour lesquelles le produit $\mathfrak{h}_1 \star \mathfrak{h}_2$ peut être effectivement reconstruit en une distribution (ou une fonction) sur l'espace physique. La réponse est donnée dans [11] :

Théorème 11. *Etant donné un secteur $V \subset T$, $\gamma \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$, $\mathcal{D}_\alpha^\gamma(V)$ désigne les éléments \mathfrak{h} de \mathcal{D}^γ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{h}(x) \in V \cap \bigoplus_{\beta \geq \alpha} T_\beta$. Alors, pour $\mathfrak{h}_1 \in \mathcal{D}_{\alpha_1}^{\gamma_1}(V)$ et $\mathfrak{h}_2 \in \mathcal{D}_{\alpha_2}^{\gamma_2}(\bar{V})$, le produit $\mathfrak{h}_1 \star \mathfrak{h}_2 : \mathbb{R} \ni x \mapsto \mathfrak{h}_1(x) \star \mathfrak{h}_2(x)$ appartient à $\mathcal{D}_\alpha^\gamma(T)$, où $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ et $\gamma = \min(\gamma_1 + \alpha_2, \gamma_2 + \alpha_1)$.*

Combiné au théorème de reconstruction, le théorème ci-dessus assure que le produit $\mathfrak{h}_1 \star \mathfrak{h}_2$ peut être reconstruit si $\gamma_1 + \alpha_2 > 0$ et $\gamma_2 + \alpha_1 > 0$.

Pour retrouver la théorie de Lyons, il suffit maintenant de choisir $V = \langle \mathbf{1}, \mathfrak{f} \rangle$ et $\bar{V} = \langle d\mathfrak{g} \rangle$ et de poser $\mathbf{1} \star \mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{f} \star d\mathfrak{g} = d\int \mathfrak{f} d\mathfrak{g}$. Si cette définition ne présuppose pas l'existence de l'intégrale croisée, la définition du modèle associé (nécessaire pour la reconstruction) repose dessus. Pour une fonction v satisfaisant la définition 3, nous considérons la fonction $\mathfrak{v}(x) = v(x)\mathbf{1} + v'(x)\mathfrak{f}$. Définir l'intégrale croisée de v contre les incréments de g revient à reconstruire une distribution à partir de $\mathfrak{v} \star d\mathfrak{g}$. Il est clair que $\gamma_1 = 2\alpha$ et $\alpha_1 = 0$. Par ailleurs, $\alpha_2 = \alpha - 1$ et γ_2 peut être choisi aussi grand que souhaité (le coefficient de $d\mathfrak{g}$ est constant donc régulier). De fait, le produit peut être reconstruit si $3\alpha - 1 > 0$, ce qui coïncide avec la théorie de Lyons.

5. REVISITER KPZ À L'AIDE DES STRUCTURES DE RÉGULARITÉ

5.1. Formulation abstraite. L'idée est maintenant de chercher h dans (1) comme la solution, via le théorème de reconstruction, d'une équation fonctionnelle définie sur une structure (A, T, G) munie d'un modèle \mathbf{M} . Ceci

nécessite, en plus de l'opération de multiplication discutée dans la section précédente, des opérations de dérivation et de convolution contre le noyau de la chaleur, l'objectif étant de mettre (1) sous la forme abstraite :

$$(22) \quad \mathfrak{h} = \mathcal{K}((\partial\mathfrak{h})^2 + \Xi) + \mathcal{G}\mathfrak{h}_0.$$

Ici, \mathfrak{h} est une fonction temps-espace, à valeurs dans T , et \mathfrak{h}_0 est sa valeur au temps 0 ; \mathcal{G} désigne un opérateur, abstrait, d'« extension harmonique » (dont la reconstruction est à penser comme la solution de l'équation de la chaleur de condition initiale la reconstruite de \mathfrak{h}_0) ; et \mathcal{K} est un opérateur, abstrait, de convolution temps-espace contre le noyau de la chaleur (pour une fonction temps-espace \mathfrak{f} , la reconstruite de $\mathcal{K}\mathfrak{f}$ est à comprendre comme la solution de l'équation de la chaleur de terme source la reconstruite de \mathfrak{f}). Par ailleurs, le symbole ∂ renvoie à un opérateur, abstrait, de différentiation, et, enfin, Ξ désigne un élément de T modélisant une réalisation du bruit ζ dans (1).

5.2. Eléments de la structure. Il s'agit maintenant de définir (A, T, G) . Nous demandons d'abord que T contienne Ξ , avec $(-3/2)^-$ pour indice d'homogénéité. En effet, pour une fonction test temps-espace φ , la formule (2) permet de quantifier la variance de $\iint \varphi(t, x) \dot{\zeta}(t, x) dt dx$. En supposant que le support de φ est compact et contient l'origine, il est possible de construire une autre fonction test, « piquée » au voisinage d'un point (t, x) arbitraire, en considérant $\varphi^\lambda(s, y) = \lambda^{-3} \varphi(\lambda^{-2}(t - s), \lambda^{-1}(x - y))$, pour λ petit. Le « scaling » entre les variables de temps et d'espace correspond ici au changement d'échelle diffusif classique. Le cas échéant, la variance associée dans (2), après substitution de φ par φ^λ , est d'ordre λ^{-3} , suggérant, après passage à la racine carrée, que l'indice d'homogénéité est effectivement $-3/2$, ou plutôt $(-3/2)^-$, c-à-d $-3/2 - \eta$ pour $\eta > 0$ arbitrairement petit. L'exposant « $-$ » dans $(-3/2)^-$ tient au prix à payer pour passer de l'estimation de la variance à une estimation valable aléa par aléa, le symbole Ξ dans (22) étant associé à une réalisation du bruit blanc.

Reprenons maintenant la stratégie de la section 2. Partant de Ξ , nous considérons $\mathcal{K}(\Xi)$, associé, dans l'esprit, à la solution de l'équation de la chaleur stochastique Y^\bullet . Puis, en prenant sa dérivée et le carré, nous obtenons $(\partial\mathcal{K}(\Xi))^2$. Alors, $\mathcal{K}((\partial\mathcal{K}(\Xi))^2)$ « correspond » à Y^\vee . De fait, $\mathcal{K}(\Xi)$, $\partial\mathcal{K}(\Xi)$, $(\partial\mathcal{K}(\Xi))^2$ et $\mathcal{K}((\partial\mathcal{K}(\Xi))^2)$ sont également à ajouter à la structure. En partant du principe que \mathcal{K} conduit à un gain d'homogénéité de 2 et ∂ à une perte de 1, leurs indices d'homogénéité respectifs sont $(1/2)^-$, $(-1/2)^-$, $(-1)^-$ et 1^- . Avec ce procédé, Ξ et $(\partial\mathcal{K}(\Xi))^2$ sont certainement les termes dont les homogénéités sont les plus basses, en l'occurrence $(-3/2)^-$ et $(-1)^-$. L'argument peut être itéré : appliquer \mathcal{K} , prendre ∂ , faire le produit avec les autres termes en $\partial\mathcal{K}$ et ajouter les symboles obtenus. Par exemple, les termes d'homogénéité $(-1/2)^-$ sont $\partial\mathcal{K}(\Xi)$ (associé à $\partial_x Y^\bullet$) et $\partial\mathcal{K}[(\partial\mathcal{K}(\Xi))^2]\partial\mathcal{K}(\Xi)$ (associé à $\partial_x Y^\vee \partial_x Y^\bullet$).

Dans [11], les éléments de T sont représentés sous forme d'arbres. Par exemple, $\partial\mathcal{K}(\Xi)$ est noté \dagger : la branche représente $\partial\mathcal{K}$ et le disque terminal \bullet représente Ξ . De même, $\mathbin{\lrcorner}$ désigne $\partial\mathcal{K}(\partial\mathcal{K}(\Xi))$ et est associé à la dérivée de la solution de la chaleur de terme source $\partial_x Y^\bullet$. En rappelant (20) (sous réserve du choix de la condition initiale), cette dérivée est égale à Φ , de sorte que $\mathbin{\lrcorner}$ est associé, dans l'esprit, à Φ . Une autre exemple est $\mathbin{\lrcorner}\mathbin{\lrcorner}$. Ici, le branchement s'interprète comme un produit, de sorte que $\mathbin{\lrcorner}\mathbin{\lrcorner}$ est à associer au produit de $\partial_x Y^\bullet$ par Φ . En reprenant la discussion du §3.3, ce produit est en fait à comprendre comme la dérivée de l'aire de Lévy associée à l'intégrale croisée de $\Phi(t, \cdot)$ contre $Y^\bullet(t, \cdot)$. De fait, le quadruplet $(\dagger, \mathbin{\lrcorner}, \mathbf{1}, \mathbin{\lrcorner}\mathbin{\lrcorner})$ est à rapprocher des « briques de base » du chemin rugueux utilisé dans le théorème 4.

5.3. Point fixe et renormalisation. La résolution de (22) repose sur un argument de point fixe fonctionnel, démontré en temps petit comme dans le théorème 4. L'espace fonctionnel sous-jacent dépend du choix du modèle \mathbf{M} associé à la structure (A, T, G) , de sorte que la solution dépend également de \mathbf{M} . Intuitivement, il s'agit de choisir $(\Pi_{(t,x)})_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}}$ tels que la solution \mathfrak{h} du point fixe vérifie $h(t, x) = \mathcal{R}\mathfrak{h}(t, x) = \Pi_{t,x}[\mathfrak{h}(t, x)](t, x)$, avec h solution donnée par le théorème 5 et \mathcal{R} l'opérateur de reconstruction. Pour définir $(\Pi_{t,x})_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}}$, il serait naturel d'identifier $\Pi_{t,x}(\Xi)$ à la distribution $\dot{\zeta}$, $\Pi_{t,x}(\dagger)$ à la distribution $\partial_x Y^\bullet$, $\Pi_{t,x}(\mathbin{\lrcorner})$ à la distribution $\partial_x Y^\vee$, $\Pi_{t,x}(\mathbin{\lrcorner}\mathbin{\lrcorner})$ aux variations, à l'ordre $(1/2)^-$, de la fonction $\partial_x Y^{\mathbin{\lrcorner}\mathbin{\lrcorner}}$ au voisinage de (t, x) , et ainsi de suite... Nous nous tiendrons à cette vision des choses, relativement simple, mais en réalité inexacte (en isolant la singularité dans le noyau de la chaleur, nous comprenons que $\partial_x Y^\bullet$, $\partial_x Y^\vee$ et $\partial_x Y^{\mathbin{\lrcorner}\mathbin{\lrcorner}}$ contiennent une partie très régulière, qu'il conviendrait d'associer à d'autres symboles, en l'occurrence polynomiaux). Sous cet angle, le développement (17) suggère que la « dérivée » $\partial\mathfrak{h}$ du point fixe s'écrit, dans les composantes d'homogénéité inférieure à $1/2$, sous la forme $\dagger + \mathbin{\lrcorner} + 2\mathbin{\lrcorner}\mathbin{\lrcorner} + \partial u$, où u est à rapprocher de la solution de (16) (les derniers termes dans (17) contribuent à des homogénéités supérieures à $1/2$). Dire que $\partial_x u$ dans (16) est contrôlé par Φ , c'est certainement dire que les composantes non nulles de ∂u d'homogénéité inférieure à $1/2$ sont $\mathbf{1}$ et $\mathbin{\lrcorner}$.

Pour compléter le parallèle avec le théorème 5, il reste à interpréter la renormalisation. De façon schématique, l'objectif est d'associer, à chaque valeur du paramètre ε impliqué dans la régularisation $\dot{\zeta}^\varepsilon$ de $\dot{\zeta}$, un modèle \mathbf{M}^ε (associé à (A, T, G)) convergeant vers \mathbf{M} lorsque ε tend 0, la convergence étant comprise comme la convergence (dans un sens ad-hoc) des applications d'« évaluation » $(\Pi_{t,x}^\varepsilon)_{t,x}$ et des opérateurs de « translation » $(\Gamma^\varepsilon)_{(t,x),(s,y)}$ sous-jacents. Lorsque $\dot{\zeta}^\varepsilon$ est une fonction régulière, donnée par exemple par convolution contre un noyau temps-espace de la forme $\varepsilon^{-3}\rho(\varepsilon^{-2}t, \varepsilon^{-1}x)$, il existe un choix simple de \mathbf{M}^ε permettant de reconstruire la solution du point fixe (22) comme la solution de l'équation non-normalisée (7). Nous n'en détaillons pas la construction, mais nous acceptons qu'il puisse être simple car les symboles ne modélisent, le cas échéant, que des fonctions régulières. Avec un tel choix, nous pouvons légitimement attendre que la

reconstruite d'un produit soit le produit des reconstruites, par exemple $\Pi_{t,x}^\varepsilon(\mathbf{v})(t,x) = [\partial_x Y_\varepsilon^\bullet(t,x)]^2$. Vu la nécessité de renormaliser dans la proposition 1, nous comprenons que, dans ce contexte, \mathbf{M}^ε ne peut pas converger vers \mathbf{M} . Clairement, renormaliser implique de déformer \mathbf{M}^ε . La proposition 1 suggère de changer \mathbf{M}^ε en $\hat{\mathbf{M}}^\varepsilon$ de sorte que $\hat{\Pi}_{t,x}^\varepsilon(\mathbf{v})(t,x) = [\partial_x Y_\varepsilon^\bullet(t,x)]^2 - C_\varepsilon^\mathbf{v}$, pour une certaine constante $C_\varepsilon^\mathbf{v}$, auquel cas $\hat{\Pi}_{t,x}^\varepsilon(\mathbf{v})(t,x)$ se lit comme $\Pi_{t,x}^\varepsilon(\mathbf{v} - C_\varepsilon^\mathbf{v}\mathbf{1})(t,x)$. Renormaliser revient donc à appliquer, en amont, une transformation linéaire aux symboles de la structure et à utiliser, ensuite, le modèle simple. Dans le cas de KPZ, cette transformation envoie \mathbf{v} sur $\mathbf{v} - C_\varepsilon^\mathbf{v}\mathbf{1}$, $\mathbf{v}\mathbf{v}$ sur $\mathbf{v}\mathbf{v} - C_\varepsilon^{\mathbf{v}\mathbf{v}}\mathbf{1}$ et $\mathbf{v}\mathbf{v}\mathbf{v}$ sur $\mathbf{v}\mathbf{v}\mathbf{v} - C_\varepsilon^{\mathbf{v}\mathbf{v}\mathbf{v}}\mathbf{1}$, pour des constantes $C_\varepsilon^\mathbf{v}$, $C_\varepsilon^{\mathbf{v}\mathbf{v}}$ et $C_\varepsilon^{\mathbf{v}\mathbf{v}\mathbf{v}}$ dépendant de ρ , $C_\varepsilon^\mathbf{v}$ divergeant comme $1/\varepsilon$, et $C_\varepsilon^{\mathbf{v}\mathbf{v}}$ et $C_\varepsilon^{\mathbf{v}\mathbf{v}\mathbf{v}}$ divergeant logarithmiquement. Le lecteur pourra comparer avec les propositions 1 et 2.

6. CONCLUSION

Cette note avait pour but de présenter une partie du cheminement suivi par Martin Hairer depuis son travail sur l'équation de KPZ et les trajectoires rugueuses jusqu'à la formulation de la théorie plus générale des structures de régularité. Dans un souci de simplification, un certain nombre d'éléments ont néanmoins été passés sous silence. A titre d'exemple, nous n'avons pas abordé la partie technique de la renormalisation, à savoir les démonstrations des propositions 1 et 2, qui exploitent de façon essentielle le caractère gaussien du bruit blanc. De même, dans l'étude de l'équation de KPZ à l'aide de la théorie des structures de régularité, nous n'avons pas explicité la construction du groupe de translations, noté G dans la définition 6. Dans [11, Section 8], G est associé à un groupe de formes linéaires, agissant sur une algèbre de Hopf construite à partir de symboles $\tau \in T$ d'homogénéité positive. Enfin, il faut souligner que la décomposition (22) n'est pas celle utilisée par Martin Hairer. Comme il y a été fait allusion dans la section §5.3, il convient en réalité de dissocier, dans la convolution contre la solution fondamentale de la chaleur, la partie singulière, localisée en temps et en espace au voisinage de l'origine, de la partie régulière, assimilée à une convolution contre un noyau régulier. Ce découpage ajoute, *de facto*, des éléments polynomiaux à la structure T .

Il faut par ailleurs noter que les arguments de la section 5 ne fonctionnent pas en dimension $d \geq 2$: le cas échéant, Ξ a pour homogénéité $[-(d/2 + 1)]^-$ et, donc, \mathbf{v} a pour homogénéité $(-d)^-$, de sorte que l'homogénéité ne croît pas sous l'action du noyau de la chaleur.

Dans [11], d'autres équations singulières sont traitées. Tel est le cas de l'équation Φ^4 en dimension 3, issue de la théorie quantique des champs :

$$(23) \quad \partial_t \phi(t, x) = \partial_{xx}^2 \phi(t, x) - \phi^3(t, x) + \dot{\zeta}(t, x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^3,$$

où $\dot{\zeta}$ est un bruit blanc temps-espace de dimension spatiale 3. Une simple répétition des calculs de la section §1.4, ou de façon équivalente des calculs d'homogénéité ci-dessus, montre, qu'en dimension $d \geq 2$, la solution de

l'équation de la chaleur stochastique est une distribution. Lorsque $d = 3$, l'ordre de régularité est comparable à celui de la dérivée de la solution de la chaleur stochastique en dimension 1. En particulier, la définition de la non-linéarité cubique présente des difficultés comparables à celles rencontrées dans la résolution de KPZ. Le lecteur pourra aussi consulter le travail précurseur de DaPrato et Debussche [4] sur le cas intermédiaire $d = 2$.

Enfin, il est à souligner que Gubinelli, Imkeller et Petrowski ont, de façon à peu près parallèle, proposé une approche alternative pour résoudre KPZ et Φ^4 . L'idée consiste également à régulariser le bruit et à étudier la convergence des solutions des équations régularisées après correction par addition de contre-termes. En revanche, l'équation vérifiée à la limite n'est pas formulée dans un espace abstrait, mais est interprétée à l'aide de l'analyse de Fourier, utilisée pour étendre la théorie de Lyons, et plus particulièrement la notion de fonctions contrôlées, à des distributions. Nous renvoyons à [7] pour une comparaison avec le travail de Martin Hairer. Très récemment, Kupiainen, [13], a montré qu'il était possible de procéder autrement que par régularisation du bruit : dans son travail, la stratégie utilisée vise à expurger, à des échelles de plus en plus fines, le noyau de la chaleur de sa singularité et à envisager, *via* une nouvelle procédure de renormalisation –inspirée de l'approche « à la Wilson » de la renormalisation, [19]–, le passage à la limite.

REMERCIEMENTS

L'auteur remercie Frédéric Patras, pour les nombreuses discussions qu'il a eues avec lui sur le sujet. Il remercie également l'examineur anonyme, qui a lu le texte avec un très grand soin, et dont les commentaires et suggestions ont été très utiles.

RÉFÉRENCES

- [1] G. Amir, I. Corwin, and J. Quastel. Probability distribution of the free energy of the continuum directed random polymer in 1+1 dimensions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 64 :466–537, 2011.
- [2] L. Bertini and G. Giacomin. Stochastic burgers and kpz equations from particle systems. *Comm. Math. Phys.*, 183 :571–607, 1997.
- [3] A. Borodine. Integrable probability. Technical report, 2014.
- [4] G. DaPrato and A. Debussche. Strong solutions to the stochastic quantization equations. *Ann. Probab.*, 31 :1900–1916, 2003.
- [5] P. Friz and N. Victoir. *Multidimensional Stochastic Processes as Rough Paths. Theory and Applications*. Cambridge University Press, 2010.
- [6] M. Gubinelli. Controlling rough paths. *J. Funct. Anal.*, 216 :86–140, 2004.
- [7] M. Gubinelli, P. Imkeller, and N. Petrowski. Paracontrolled distributions and singular pdes. Technical report, 2014.
- [8] M. Hairer. Introduction to regularity structures. *Braz. Jour. Prob. Stat.*, To appear.
- [9] M. Hairer. Solving the kpz equation. *Ann. of Math.*, 178 :559–664, 2013.
- [10] M. Hairer. Singular stochastic pdes. Technical report, 2014.
- [11] M. Hairer. A theory of regularity structures. *Invent. Math.*, 198 :269–504, 2014.

- [12] M. Kardar, G. Parisi, and Y.-C. Zhang. Dynamical scaling of growing interfaces. Phys. Rev. Lett., 56 :889–892, 1986.
- [13] A. Kupiainen. Renormalization group and stochastic pde's. Technical report, 2014.
- [14] T. Lyons, M. Caruana, T., and Lévy. Differential equations driven by rough paths. Lectures from the 34th Summer School on Probability Theory held in Saint-Flour, 2004. Lecture Notes in Mathematics, 1908. Springer, Berlin, 2007.
- [15] T. Lyons and Z. Qian. System control and rough paths. Oxford University Press, Oxford, 2002.
- [16] J. Quastel. Introduction to kpz. Technical report, 2012.
- [17] S. Sasamoto and H. Spohn. Exact height distributions for the kpz equation with narrow wedge initial condition. Nuclear Physics B, 834 :523–52, 2010.
- [18] S. Sasamoto and H. Spohn. One-dimensional kardar-parisi-zhang equation : An exact solution and its universality. Phys. Rev. Lett., 104 :230602, 2010.
- [19] K. Wilson. The renormalization group and critical phenomena. Technical report, 1982.
- [20] L.C. Young. An inequality of the Hölder type, connected with stieltjes integration. Acta Math., 67 :251–282, 1936.